ESCUELA MILITAR DE INGENIERIA
CÁLCULO II
Misceláneas de problemas
2013

Tema: Funciones Escalares de Variable Vectorial y Derivadas Parciales.

Hallar el dominio de las funciones dadas y representarlas gráficamente:

1. $f(x, y) = \ln(-x + y)$
2. $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x - y^2}}$
3. $f(x, y) = \operatorname{arc\,sen}(x + y)$
4. $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$
5. $f(x, y) = \sqrt{x} + \operatorname{arc\,sen}(y)$
6. Identificar $f(x)$ si se conoce que: $f\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$
7. Identificar $f(x, y)$ si se conoce que: $f(x + y, x - y) = xy + y^2$
8. Sea $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$. Determinar las funciones f y z si $y = 1$ cuando $z = x$

Usando la definición de límite demostrar la validez de:

9. $\lim\limits_{(x,\, y)\to(3,1)} (x^2 - y^2 + 2x - 4y) = 10$
10. $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,1)} (3x^2y^2 + 4x + 3y + 2) = 5$

Si existen, calcular el valor de los límites siguientes:

11. $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy} - 1}{x}$

12. $\lim\limits_{(x,\,y)\to(2,0)} \dfrac{x+\ln(1+xy)}{1+x+y}$

13. $\lim\limits_{(x,\,y)\to(4,\pi)} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

14. $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

15. $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

Localizar los puntos de discontinuidad de las funciones:

16. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

17. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(x+y)}{y^2-x^2}$

18. $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2y^2-4}}$

Analizar si la función dada es continuidad en $(0,0)$

19. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

20. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

21. Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y) = 3x^2+4y^2-2x$ en el punto $P(1,2)$ en la dirección orientada hacia el punto $Q(3,4)$.

22. Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y) = \ln(x+y+z)$ en el punto $P(1,0,0)$ en la dirección de $Q(4,3,1)$

23. Determinar el valor máximo de la derivada direccional de $f(x,y) = x^2-3xy+y^2$ en el punto $(4,2)$.

Aplicando la definición de derivada parcial, calcular f_x, f_y en los casos:

24. $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen}^2 y$

25. $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$

26. $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

27. Hallar las derivadas parciales de la función: $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-xy}$

28. Hallar las derivadas parciales de la función: $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}\right)$

29. Hallar las derivadas parciales de la función: $f(x,y) = \arctan\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

30. Hallar las derivadas parciales de la función: $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

31. Si $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{z}\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Hallar una expresión reducida de: $xf_x + yf_y + zf_z$

32. Para $g(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ probar la veracidad de: $xg_x + yg_y = 1$

33. Para $h(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ probar la veracidad de: $xh_x + yh_y = h$

34. Para $w = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{z}\right)$ probar la veracidad de: $xw_x + yw_y + zw_z = 0$

35. Para $w = x^2y + y^2z + z^2x$ probar la veracidad de: $w_x + w_y + w_z = (x+y+z)^2$

36. Para $w = (x-y)(y-z)(z-x)$ probar la veracidad de: $w_x + w_y + w_z = 0$

37. Para la función: $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ calcular:

    a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

    b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

    c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

38. Para la función $z = xe^{-xy}$ calcular:

    a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

39. Dada $f(x,y) = e^{\ln(\frac{x-2y}{2x-y})}$, calcular: $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

En las funciones siguientes, probar que: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

40. $z = x^2 - 4xy + 3y^2$

41. $z = \ln(x+y)$

42. $z = xye^{-xy}$

43. $z = \operatorname{sen}(xy) + \arctan(xy)$

Probar que las siguientes funciones, verifican la ecuación de Laplace:

44. $f(x,y) = x^3y - xy^3$

45. $f(x,y) = \arctan\Big(\dfrac{2xy}{x^2 - y^2}\Big)$

46. $f(x,y) = e^{-x}\cos y$

47. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

48. Para la función $u(x,y) = (x-y)\ln(x+y)$ probar que $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

49. Para la función $u(x,y) = xe^y + ye^x$ probar que $u_{xxx} + u_{yyy} = xu_{yyx} + yu_{yxx}$

50. Demostrar que la función $z = f(x + h(y))$ verifica la ecuación $z_x z_{yx} = z_y z_{xx}$

51. Para la función $z = u(x,y)e^{ax+by}$; si se conoce que $u_{xy} = 0$. Hallar los valores de a y b que verifiquen la ecuación: $z_{xy} - z_x - z_y + z = 0$

52. En la ecuación $f(r,t) = t^n e^{\frac{-r^2}{4t}}$ calcular el valor de la constante n de manera que se verifique la ecuación:
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\Big)$$

53. Para la función $w = \ln\left(\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}\right)$ probar que $w_{xx} + w_{yy} = 0$

54. Para la función $w = \left(\dfrac{x-y+z}{x+y-z}\right)^n$ probar que $xw_x + yw_y + zw_z = 0$

55. Para la función $z = \ln(e^x + e^y)$ probar que:

    a) $z_x + z_y = 1$

    b) $z_{xx}z_{yy} - (z_x y)^2 = 0$

56. Aplicando la regla de la cadena, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ en la composición:

$$z = \ln(x^2+y^2) + \sqrt{x^2+y^2}; \quad x = e^u \cos v, \quad y = e^u \operatorname{sen} v$$

57. Si se conocen: $z = f(x,y)$, $x = u\cos a - v \operatorname{sen} a$, $y = u \operatorname{sen} a + v\cos a$; donde a es una constante, probar que:

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = (f_u)^2 + (f_v)^2$$

58. Para $z = x^n f(\frac{y}{x^2})$ probar que: $xz_x + 2yz_y = nz$

59. Para $z = f(x^2 - y^2)$ probar que: $yz_x + xz_y = 0$

60. Para $z = f(2x+3y)$ probar que: $3z_x - 2z_y = 0$

61. Para $z = f(x^3 y)$ probar que: $xz_x - 3yz_y = 0$

62. Para $z = f(x+ay) + g(x-ay)$ probar que: $a^2 z_{xx} - z_{yy} = 0$

63. Para $f(xy, z-2x) = 0$ probar que: $xz_x - yz_y = 2x$

64. Si $z = f(x,y)$ probar que la sustitución $x = e^r$, $y = e^t$ transformar la ecuación

$$x^2 z_{xx} + y^2 z_{yy} + xz_x + yz_y = 0$$

    en $z_{rr} + z_{tt} = 0$

65. Para la función

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x + e^y + \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    Probar que $f_{xx}(0,0) = 1$

66. Si $f = f(x, y)$ es una función homogénea de grado n, probar la veracidad de la ecuación $xf_x + yf_y = nf$

Verificar que las siguientes funciones homogéneas satisfacen la propiedad del problema anterior:

67. $f(x, y) = 3x^5 - 4xy^4 + 6x^3y^2 - y^5; \qquad n = 5$

68. $f(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} + \ln\Big(\dfrac{4x - 3y}{4x + 3y}\Big); \qquad n = 0$

69. $f(x, y) = \sqrt{x^3 - 3xy^2 + y^3} + \sqrt{x^3 - 3x^2y + y^3}; \qquad n = \frac{3}{2}$

En los siguientes ejercicios determinar cuáles de las diferenciales son exactas. En el caso de una diferencial exacta, determinar la función de la cuál es diferencial exacta.

70. $(x + y)dx + (x + 2y)dy$

71. $(x^3 + 3x^2y)dx + (x^3 + y^3)dy$

72. $(x^2 \operatorname{sen} y)dx + (x^2 \cos y)dy$

Calcular el vector gradiente para las siguientes funciones:

73. $f(x, y, z) = 3xyz + x^2y^2z^2 + x + y + z$

74. $f(x, y, z) = 16x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 1$

75. $f(x, y, z) = \ln\Big(\dfrac{2x + 3y + 4z}{4x - 3y - 2z}\Big)$

76. Empleando derivación implícita, calcular z_x, z_y en $xy^2 + yz^2 + z^3 + x^3 - 4 = 0$

77. Para la forma implícita $f(x+y-z, x^2+y^2) = 0$ probar la validez de $xz_y - yz_x = x - y$

78. En el par de funciones implícitas $\begin{cases} 3x + y = u^2 - v \\ x - 2y = u - 2v^2 \end{cases}$ si se conoce que $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ hallar expresiones para:

   a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

   b) $\dfrac{\partial v}{\partial x}$

   c) $\dfrac{\partial u}{\partial y}$

d) $\dfrac{\partial v}{\partial y}$

79. En el par de funciones implícitas $\begin{cases} xu^2 + v = y^3 \\ 2yu - xv^3 = 4x \end{cases}$ si se conoce que $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$

    Hallar expresiones para:

    a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

    b) $\dfrac{\partial v}{\partial y}$

80. Calcular $J\left(\dfrac{f,g}{x,y}\right)$ sabiendo que $f(x,y) = 3x^2 - xy; \quad g(x,y) = 2xy^2 + y^3$

81. Para $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases}$ Calcular $J\left(\dfrac{x,y}{r,\phi}\right)$

82. Si $f(x,y,z) = x + 3y^2 - z^3; \quad g(x,y,z) = 2x^2yz; \quad h(x,y,z) = 2z^2 - xy$, Calcular $J\left(\dfrac{f,g,h}{x,y,z}\right)$ en el punto $(1,-1,0)$

83. Dadas las ecuaciones $x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta; \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta; \quad z = \rho\cos\phi$ calcular $J\left(\dfrac{x,y,z}{\rho,\theta,\phi}\right)$